

## KETERKAITAN KEMAMPUAN REPRESENTASI DAN ABSTRAKSI DALAM PENYELESAIAN MASALAH MATEMATIKA

DOI: <https://doi.org/10.22236/semnas.v1i1.83>

**Yatha Yuni\*<sup>1</sup>, Nurimani<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>STKIP Kusuma Negara

yathayuni@stkipkusumanegara.ac.id

*Abstract: Mathematics learning currently emphasizes increasing students' mathematical thinking ability. This is done to answer the demands and increasingly fierce global competition, because one's success in his life is determined, among others, by his ability to think, especially in the effort to solve problems in life that always come and go. Of the several components of mathematical thinking ability, the focus of the study in this article is the ability of representation and abstraction. This article is a study that aims to observe the relationship of mathematical thinking ability between representation and abstraction in mathematics. The research method uses a qualitative research design with "study grounded theory". Based on the opinion of experts studied, along with some examples of mathematical problems and how to solve them, it can be found that the relationship between representation and abstraction is a new abstract concept, can be formed inductively or empirically from some of its representations through a process of forming the concept. On the other hand, the form of representation is basically an embodiment of a more abstract concept. So it can be concluded that there is a close relationship between the ability of representation and abstraction in solving mathematical problems.*

*Keywords: abstraction, mathematical thinking, representation*

**Abstrak:** Pembelajaran matematika sekarang ini lebih menekankan pada peningkatan kemampuan berpikir matematis peserta didik. Hal tersebut dilakukan untuk menjawab tuntutan dan persaingan global yang semakin ketat, karena keberhasilan seseorang dalam kehidupannya antara lain ditentukan oleh kemampuan berpikirnya, terutama dalam upaya memecahkan masalah-masalah dalam kehidupan yang selalu datang silih berganti. Dari beberapa komponen kemampuan berpikir matematis, fokus kajian pada artikel ini adalah kemampuan representasi dan abstraksi. Artikel ini merupakan suatu kajian yang bertujuan untuk mengamati hubungan kemampuan berpikir matematis antara representasi dan abstraksi dalam pelajaran matematika. Metode penelitian menggunakan rancangan penelitian kualitatif dengan "study grounded theory". Berdasarkan pendapat ahli yang dikaji, beserta beberapa contoh masalah matematika dan cara menyelesaikannya, maka dapat ditemukan bahwa hubungan antara representasi dan abstraksi merupakan sebuah konsep abstrak yang baru, dapat terbentuk secara induktif atau empiris dari beberapa representasinya melalui sebuah proses pembentukan konsep tersebut. Dilain pihak, bentuk representasi pada dasarnya merupakan perwujudan dari konsep yang lebih abstrak. Sehingga

dapat disimpulkan bahwa terdapat keterkaitan yang erat antara kemampuan representasi dan abstraksi dalam menyelesaikan masalah-masalah matematika.

**Kata kunci:** abstraksi, berpikir matematis, representasi

## PENDAHULUAN

Konteks pembelajaran bermakna berbasis kurikulum 2013 dengan pembelajaran “saintifiknya”, mengoptimalkan pengembangan *high order thinking skill (HOTS)* dalam proses pembelajaran khususnya pelajaran matematika. Prinsip-prinsip pembelajaran abad 21 juga menjadi dasar pijakan sebagai salah satu dasar pertimbangan dalam proses *benchmarking* perubahan dan pengembangan pembelajaran yang akan diterapkan (Fajri, 2017). Kemampuan berpikir matematis lanjutan merupakan bagian dari HOTS, yang saat ini menjadi viral di kalangan peneliti pendidikan matematika. Pengembangan kemampuan berpikir matematis saat ini diidentifikasi dalam beberapa komponen (Sumarmo, 2014) diantaranya: (1) pemahaman matematis; (2) pemecahan masalah matematis; (3) penalaran matematis; (4) koneksi matematis; (5) komunikasi matematis; (6) berpikir kritis; (7) berpikir kreatif; (8) literasi matematis; (9) representasi; (10) abstraksi; dan sebagainya.

Fokus penulisan artikel ini, untuk memaparkan keterkaitan antara kemampuan representasi dan abstraksi dalam menyelesaikan masalah-masalah matematika. Karena bagi peneliti pemula, masyarakat awam, dan sebagian guru (hasil wawancara di lingkungan Yayasan PB. Sudirman) masih beranggapan kemampuan berpikir matematis itu berdiri sendiri-sendiri. Untuk membuka wawasan yang lebih luas tentang keterkaitan antara kemampuan berpikir matematis, maka akan dipaparkan dengan lebih terperinci apakah ada keterkaitan antara kemampuan representasi dan abstraksi dalam menyelesaikan masalah-masalah matematika.

### **Kemampuan Representasi**

Cai, Lane dan Jakabcsin (Suryana, 2012) menyatakan bahwa representasi merupakan cara yang digunakan seseorang untuk mengemukakan jawaban atau gagasan matematis yang bersangkutan. Ragam representasi yang sering digunakan dalam mengkomunikasikan matematika antara lain tabel, gambar, grafik, ekspresi atau notasi matematis, serta menulis dengan bahasa sendiri, baik formal maupun informal. Sebagai contoh dalam teori himpunan, penyajian himpunan direpresentasikan dalam bentuk :

#### 1. Enumerasi

Contoh :  $S = \{ p, q, \{p, q, r\}, \{p, r\} \}$

## 2. Simbol-simbol baku

Contoh :

$\mathbb{Z}$  = himpunan bilangan bulat

$\mathbb{Q}$  = himpunan bilangan rasional

$\mathbb{R}$  = himpunan bilangan real

## 3. Notasi pembentuk himpunan

Contoh :

$R$  adalah himpunan bilangan bulat positif yang lebih dari 3, maka notasinya dituliskan sebagai berikut:  $R = \{ x \mid x \text{ adalah bilangan bulat positif lebih dari } 3 \}$  atau

$$R = \{ x \mid x > 3, x \in \mathbb{Z}^+ \}$$

Merepresentasikan suatu konsep matematika diartikan oleh Dreyfus sebagai menghasilkan suatu contoh (*instance*), contoh khusus (spesimen), gambaran (*image*) dari konsep tersebut, yang bersifat simbolik atau mental (Tall dalam Sumarmo: 2014). Representasi simbolik baik secara lisan maupun tulisan bertujuan untuk memudahkan membuat komunikasi tentang konsep tersebut. Sebaliknya, suatu representasi mental menunjukkan skemata internal yang digunakan seorang individu untuk berinteraksi dengan dunia luar. Representasi mental terjadi dalam otak manusia dan tak terlihat oleh mata, namun dapat diidentifikasi melalui penjelasan individu dalam bentuk lisan maupun tulisan terhadap objek matematika tertentu.

Representasi simbol, misalnya dalam merepresentasikan konsep luas daerah yang dibatasi oleh kurva  $f$ , sumbu  $X$ , garis  $x = a$  dan  $x = b$  disimbolkan dengan  $\int_a^b f(x)dx$ . Sedangkan representasi mental terlukis ketika seseorang merumuskan, mendefinisikan, mengilustrasikan atau memberi contoh atau non-contoh suatu konsep matematika. Representasi mental seseorang sangat mungkin berbeda dengan representasi mental yang lain, bahkan seseorang dapat menyusun representasi mental dalam bentuk yang beragam. Sebagai contoh, bentuk representasi dari konsep fungsi, dapat berbentuk grafik, formula aljabar, diagram panah, himpunan pasangan berurutan dan tabel nilai. Agar individu berhasil dalam belajar matematika maka diharapkan ia memiliki representasi mental yang baik (Sumarmo, 2014).

Mudzakir (2006) mengelompokkan representasi matematis ke dalam tiga ragam representasi yang utama, yaitu 1) representasi visual berupa diagram, grafik atau tabel, dan gambar; 2) Persamaan atau ekspresi matematika; dan 3) Kata-kata atau teks tertulis. Adapun indikator representasi disajikan pada Tabel 1 berikut:

**Tabel 1.** Indikator Kemampuan Representasi Matematis (Mudzakir, 2006)

No	Representasi	Bentuk-bentuk Operasional
1	Visual: a. Diagram, tabel/grafik b. Gambar	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. menyajikan kembali data atau informasi dari suatu representasi ke representasi diagram, grafik atau tabel</li> <li>2. Menggunakan representasi visual untuk menyelesaikan masalah</li> <li>3. Membuat gambar pola-pola geometri</li> <li>4. Membuat gambar untuk memperjelas masalah dan memfasilitasi penyelesaiannya</li> </ol>
2	Persamaan atau Ekspresi matematis	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Membuat persamaan atau model matematika dari representasi lain yang diberikan</li> <li>2. Membuat konjektur dari suatu pola bilangan</li> <li>3. Menyelesaikan masalah dengan melibatkan ekspresi matematis</li> </ol>
3	Kata-kata atau teks tertulis	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Membuat situasi masalah berdasarkan data atau representasi yang diberikan</li> <li>2. Menuliskan interpretasi dari suatu representasi</li> <li>3. Menuliskan langkah-langkah penyesuaian masalah matematika dengan kata-kata</li> <li>4. Menyusun cerita yang sesuai dengan suatu representasi yang disajikan</li> <li>5. Menjawab soal dengan menggunakan kata-kata atau teks tertulis</li> </ol>

### **Kemampuan Abstraksi**

Abstraksi menurut Tall (1991) adalah proses penggambaran situasi tertentu ke dalam suatu konsep yang dapat dipikirkan (*thinkable concept*) melalui sebuah konstruksi. Konsep yang dapat dipikirkan tersebut berada pada level berfikir yang lebih rumit dan kompleks. Menurutnya, proses abstraksi dapat terjadi dalam beberapa keadaan, tetapi terdapat tiga keadaan yang biasa memunculkan proses abstraksi dalam proses belajar matematika. Keadaan yang pertama, dapat muncul ketika individu memfokuskan perhatiannya pada karakteristik dari objek-objek yang dicermati, kemudian memberikan nama melalui suatu proses pengklasifikasian berdasarkan kategori ke dalam beberapa kelompok. Keadaan yang kedua, ketika memfokuskan perhatian pada tindakan-tindakan yang diberlakukan pada objek-objek, yang mengarahkan kepada pemampatan menjadi simbol-simbol yang dapat dikomputasikan secara aritmatika, simbol-simbol yang dapat dimanipulasi dalam aljabar, dan simbol-simbol dalam kalkulus. Keadaan yang ketiga, terjadi ketika memformulasikan sebuah himpunan teoritis tentang konsep untuk mengonstruksi sebuah konsep yang dapat dipikirkan melalui serangkaian bukti matematis.

Proses abstraksi adalah sebuah cara mempersepsikan dan memikirkan realitas/nyata yang dapat diajarkan pada siswa atau mahasiswa. Abstraksi dapat dipandang sebagai sebuah proses dialektik, yaitu proses berpikir yang teratur, logis, dan teliti antara objek-objek kongkrit yang diberikan dan representasi abstraknya dari objek-objek tersebut. Nurhasanah (2010) menjelaskan bahwa indikasi terjadinya proses abstraksi dalam belajar dapat dicermati dari beberapa aktivitas berikut:

1. Mengidentifikasi karakteristik objek melalui pengamatan langsung
2. Mengidentifikasi karakteristik objek yang dimanipulasikan atau diimajinasikan.
3. Membuat generalisasi
4. Merepresentasikan gagasan matematika dalam simbol-simbol matematika
5. Melepaskan sifat-sifat kebendaan dari sebuah objek atau melakukan idealisasi.
6. Membuat hubungan antar proses atau konsep untuk membentuk suatu pengertian baru.
7. Mengaplikasikan konsep pada konteks yang sesuai
8. Melakukan manipulasi objek matematis yang abstrak.

Piaget (Nurhasanah, 2010) mengemukakan gagasan tentang tiga bentuk abstraksi, yaitu abstraksi empiris, abstraksi empiris semu, dan abstraksi reflektif. Abstraksi empiris adalah proses memperoleh pengetahuan dari sifat-sifat berbagai macam objek. Proses tersebut berkaitan dengan pengalaman seorang subjek ketika melihat objek melalui pengalaman langsung dengan melihat sifat-sifat yang tampak dari luar suatu objek. Namun, pengetahuan yang terbentuk bersifat internal, terjadi di dalam diri subjek. Menurut Piaget jenis abstraksi ini dapat mengantarkan kemampuan mengekstraksi sifat-sifat umum objek dan mengantarkan pada generalisasi lanjutan.

Abstraksi empiris semu digambarkan oleh Piaget sebagai sebuah proses yang berada diantara abstraksi empiris dan abstraksi reflektif. Proses abstraksi empiris semu terjadi ketika subjek dihadapkan pada suatu objek kemudian menemukan sifat-sifat objek melalui proses pembayangan suatu tindakan yang dikenakan pada objek tertentu. Subjek berusaha membuat konfigurasi pada objek dalam ruang serta mencermati hubungan-hubungan yang mungkin terjadi. Dapat dikatakan bahwa abstraksi empiris semu sebagai upaya melepaskan sifat-sifat kebendaan sebuah objek.

Abstraksi reflektif yang disebut juga oleh Piaget sebagai koordinasi umum dari tindakan-tindakan yang bersumber pada diri subjek dan keseluruhannya terjadi secara internal. Proses ini mengantarkan subjek pada suatu jenis generalisasi yang berbeda yang bersifat konstruktif dan

menghasilkan suatu bentuk sintesis baru diantara aturan khusus dalam memperoleh pengetahuan baru.

## **METODE PENELITIAN**

Metode penelitian yang digunakan merupakan penelitian kualitatif dengan strategi *study grounded theory* (Creswell, 2010). Strategi *grounded theory* merupakan rancangan yang mengharuskan peneliti menjalani sejumlah tahap pengumpulan data dan penyaringan informasi yang diperoleh. Rancangan ini mempunyai dua karakteristik, yaitu: (1) perbandingan yang konstan antara data dan kategori-kategori yang muncul; (2) pengambilan contoh secara teoritis atas kelompok-kelompok yang berbeda untuk memaksimalkan kesamaan dan perbedaan informasi. Berdasarkan hal tersebut, maka artikel ini mengkaji beberapa teori dan pendapat pakar, serta memberikan contoh nyata masalah-masalah matematis dan penyelesaiannya.

## **HASIL DAN PEMBAHASAN**

Pada sub hasil dan pembahasan, terlebih dahulu akan dipaparkan hubungan antara kemampuan representasi dan abstraksi disertakan dengan contoh-contoh masalah matematis dan penyelesaiannya.

### **Keterkaitan Representasi dan Abstraksi**

Ferrari (2003) mengungkapkan adanya keterkaitan yang erat antara representasi dan abstraksi, menurutnya representasi memiliki peran yang penting dalam proses generalisasi (proses pengenalan beberapa karakteristik umum dalam sebuah himpunan objek-objek mental dan proses ekspansi struktur pengetahuan), dekontekstualisasi (suatu proses yang membawa pengetahuan keluar dari konteksnya atau memisahkan suatu konsep dengan konteksnya) dan reifikasi (suatu proses kognitif ketika konsep-konsep atau proses matematis dapat dilihat strukturnya atau dipandang sebagai objek, konsep-konsep dan proses tersebut kemudian dapat digunakan pada level berpikir yang lebih tinggi) yang merupakan bagian dari proses abstraksi yang lebih kompleks.

“Merepresentasikan” dan “mengabstraksikan” menurut Dreyfus (dalam Tall, 1991) adalah dua proses berlawanan yang saling melengkapi. Di satu sisi, sebuah konsep seringkali diabstraksikan dari beberapa bentuk representasinya, dan di sisi lain, bentuk representasi selalu merupakan representasi dari beberapa konsep yang lebih abstrak. Sumarmo (2014) juga sependapat bahwa merepresentasi dan mengabstraksi

adalah proses yang saling melengkapi satu dengan lainnya. Pada satu kasus suatu konsep sering diabstraksi dari beberapa representasi, dilain kasus suatu representasi merupakan representasi dari beberapa konsep yang abstrak.

Sumarmo (2014) juga menyatakan hendaknya proses belajar dilaksanakan melalui empat tahap berturut-turut, yaitu: 1) representasi tunggal, 2) representasi paralel, 3) menyusun kaitan antar representasi paralel, dan 4) mengintegrasikan representasi dan mengalihkannya secara fleksibel. Penggunaan beberapa representasi membantu peserta didik membuat transisi dari pemahaman konkrit yang terbatas menjadi pemahaman yang lebih abstrak dan fleksibel.

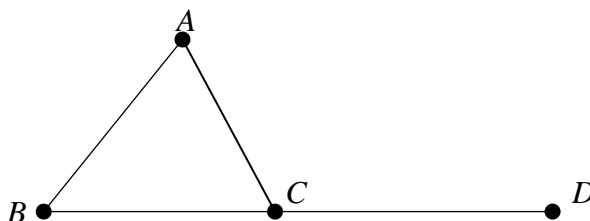
Jika pendapat para ahli di atas dikaji lebih lanjut, maka hubungan antara representasi dan abstraksi dapat dipahami sebagai berikut: sebuah konsep abstrak yang baru, dapat terbentuk secara induktif atau empiris dari beberapa representasinya melalui sebuah proses pembentukan konsep tersebut. Dilain pihak, bentuk representasi pada dasarnya merupakan perwujudan dari konsep yang lebih abstrak.

Untuk lebih nyata dan jelas amati contoh permasalahan dan penyelesaian matematis dari beberapa sub bidang matematika berikut ini:

### **Contoh soal 1:**

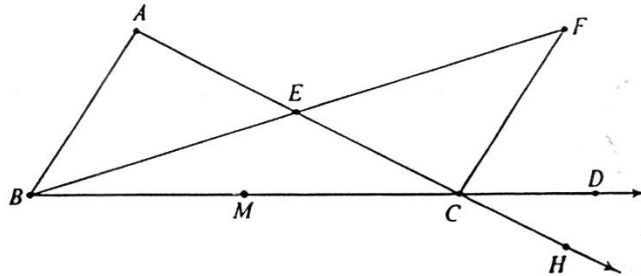
Coba jelaskan dan tunjukkan mengapa sudut eksterior dalam suatu segitiga lebih besar daripada sudut interiornya (gunakan postulat yang anda ketahui)! Periksalah untuk segitiga mana saja berlaku aturan tersebut!

**Proses representasi** yang diharapkan akan dimunculkan dalam jawaban mahasiswa adalah representasi matematis berupa gambar. Berdasarkan gambar mahasiswa dapat mengilustrasikan konsep sudut interior dan sudut eksterior. Dari bentuk representasi konsep geometri di bawah ini, mahasiswa dapat memberikan ilustrasi atau contoh atau non-contoh konsep. Masing-masing mahasiswa mungkin akan memberikan representasi yang berbeda atau beragam. Proses representasi awal yang diharapkan:



**Gambar 1.** Representasi dari contoh soal 1 (geometri)

Sekarang akan dibuktikan teorema sudut eksterior, sebagai cara menuju perkembangan representasi lebih lanjut. Pertama, diperkenalkan notasi yang akan digunakan sebagai pembuktian. Notasi  $\overline{AB}$  menunjukkan segmen AB



**Gambar 2.** Representasi lanjutan dari contoh soal 1 (geometri)

Selanjutnya pembuktian secara **abstraksi**: misalkan ABC adalah sebarang segitiga, dan misalkan D merupakan perpanjangan dari  $\overline{BC}$  melalui C. pertama akan ditunjukkan bahwa sudut eksterior  $\angle ACD$  lebih besar dari  $\angle A$ . Misalkan E merupakan titik tengah  $\overline{AC}$ , dan misalkan  $\overline{BE}$  merupakan perluasan panjangnya melalui E hingga F, maka  $\overline{AE} = \overline{EC}$ ,  $\overline{BE} = \overline{EF}$  dan  $\angle AEB = \angle CEF$  (sudut bertolak belakang sama besar). Jadi  $\triangle AEB \cong \triangle CEF$  (SAS), dan  $\angle BAE = \angle FCE$  (bagian segitiga kongruen sama besar). Karena  $\angle ACD > \angle FCE$  (keseluruhan sudut selalu lebih besar dari bagiannya), sehingga dapat kita simpulkan  $\angle ACD > \angle BAE = \angle A$ .

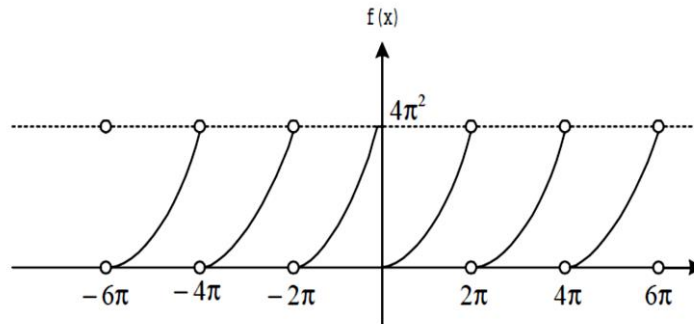
Untuk menunjukkan bahwa  $\angle ACD > \angle B$ , perluas  $\overline{AC}$  melalui C hingga H, yang membentuk sudut  $\angle BCH$ . Kemudian tunjukkan bahwa  $\angle BCH > \angle B$ , dengan menggunakan prosedur bagian pertama pembuktian: misalkan M merupakan titik tengah  $\overline{BC}$ , perluas panjang  $\overline{AM}$  melalui M, dan lain-lain. Untuk melengkapi bukti, perhatikan bahwa  $\angle BCH$  dan  $\angle ACD$  merupakan sudut bertolak belakang sehingga sudut tersebut sama besar. Pernyataan  $\angle ACD > \angle FCE$  bergantung pada diagramnya. Sekarang mudah melakukan pembuktian beberapa hasil yang cukup penting.

### Contoh soal 2: Materi Kalkulus Lanjut

Ekspansikan  $f(x) = x^2; 0 < x < 2\pi$  kedalam deret Fourier jika  $f(x)$  Periodik dengan periode  $2\pi$  dan buktikan bahwa pada  $x = 0$  deret Fourier dari  $f(x) = x^2$  konvergen ke  $f(x)$ .

Jawaban: 
$$f(0) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{n^2} \cos 0 - \frac{4}{\pi n} \sin 0 \right) = 2\pi^2$$

**Representasi:**



**Gambar 3.** Bentuk representasi dari penyelesaian contoh soal 2

Sedangkan bentuk abstraksi dari penyelesaian contoh soal 2 sebagai berikut:

**Abstraksi:**

$$2L = a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{8}{3} \pi^2$$

Maka

dari

sebagai

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} x^2 d \sin nx = \frac{1}{n\pi} \left[ x^2 \sin nx - \int_0^{2\pi} \sin nx dx^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left[ x^2 \sin nx - 2 \int_0^{2\pi} x \sin nx dx \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left[ x^2 \sin nx - \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} x d \cos nx \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left[ x^2 \sin nx - \frac{2}{n} \left( x \cos nx - \int_0^{2\pi} \cos nx dx \right) \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left[ x^2 \sin nx - \frac{2}{n} x \cos nx - \frac{2}{n^2} \sin nx \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4}{n^2}$$

Diketahui bahwa periode

$$2\pi \rightarrow L = \pi$$

langkah untuk

menentukan deret Fourier

$$f(x) = x^2$$

konvergen ke  $f(x)$

berikut:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin \frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} x^2 d \cos nx = -\frac{1}{n\pi} \left[ x^2 \cos nx - \int_0^{2\pi} \cos nx dx^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left[ x^2 \sin nx - 2 \int_0^{2\pi} x \sin nx dx \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left[ x^2 \sin nx - \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} x d \cos nx \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left[ x^2 \sin nx - \frac{2}{n} \left( x \cos nx - \int_0^{2\pi} \cos nx dx \right) \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left[ x^2 \sin nx - \frac{2}{n} x \cos nx - \frac{2}{n^2} \sin nx \right]_0^{2\pi}$$

deret fourier dari  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{4\pi}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4}{\pi n} \sin nx \right)$$

**Bukti:**

Pada  $x = 0$ ; deret Fourier dari  $f(x) = x^2$  konvergen ke  $f(x)$

$$f(0) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{n^2} \cos 0 - \frac{4}{\pi n} \sin 0 \right) = 2\pi^2$$

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 2\pi^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{3} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2 \quad , \text{ terbukti}$$

**KESIMPULAN**

Berdasarkan pendapat pakar dan hasil penelitian sebelumnya yang diadopsi pada artikel ini, diantaranya Dreyfus (1990) tentang *Advance Mathematical Thinking* (AMT). Dreyfus menyatakan kognitif terbaru tentang proses berpikir matematis tingkat lanjut/proses berpikir matematis tingkat lanjut dapat terjadi diluar geometri Euclidean dan aljabar menengah. Yang dimaksud berpikir matematis yang maju seperti abstraksi, pembuktian dan bernalar dengan hipotesis khusus yang dipilih sebagai representatif (misal topik fungsi dan kalkulus). Pernyataan ini dapat dipahami bahwa ada hubungan antara abstraksi dengan representasi.

Sumarmo (2014) juga menyatakan hendaknya proses belajar dilaksanakan melalui empat tahap berturut-turut, yaitu: 1) representasi tunggal, 2) representasi paralel, 3) menyusun kaitan antar representasi paralel, dan 4) mengintegrasikan representasi dan mengalihkannya secara fleksibel. Penggunaan beberapa representasi membantu peserta didik membuat transisi dari pemahaman konkrit yang terbatas menjadi pemahaman yang lebih abstrak dan fleksibel.

Pendapat para ahli yang telah dikaji, dengan beberapa contoh masalah matematis dan penyelesaiannya, maka keterkaitan antara representasi dan abstraksi dapat diasumsikan sebagai berikut: sebuah konsep abstrak yang baru, dapat terbentuk secara induktif atau empiris dari beberapa representasinya melalui sebuah proses pembentukan konsep tersebut. Dilain pihak, bentuk representasi pada dasarnya merupakan wujud nyata dari konsep yang lebih abstrak. Langkah mudah untuk memahami yang lebih abstrak maka dilakukan proses representatif. Sehingga dapat disimpulkan bahwa ada hubungna atau keterkaitan antara kemampuan representasi dengan abstraksi dalam penyelesaian masalah matematika.

## **DAFTAR PUSTAKA**

- Creswell, J.W. (2010). *Research Design Pendekatan Kualitatif, Kuantitatif, dan Mixed (terjemahan)*. Pustaka Pelajar, Yogyakarta.
- Dreyfus, T. (1990). Advance Mathematical Thinking. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education (ICMI Studies*, pp. 113-134). Cambridge University Press. Doi:10.1017/CBO9781139013499.008
- Fajri, Muhammad (2017). Kemampuan Berpikir Matematis Dalam Konteks Pembelajaran Abad 21 Di Sekolah Dasar, *Lemma* 2017; 3(2); 1-11.

- Ferrari, P. (2003). *Abstraction in Mathematics*. The Royal Society, Italy.
- Mudzakir, A. (2006). *Psikologi Pendidikan*. Pustaka Setia, Bandung.
- Nurhasanah, F. (2010). *Abstraksi Siswa SMP dalam Belajar Geometri Melalui Penerapan Model Van Hiele dan Geometers' Sketchpad*. Tesis PPS UPI Bandung: Tidak diterbitkan.
- Sumarmo, U. (2014). *Advanced Mathematical Thinking dan Habit of Mind Mahasiswa (Bahan Kuliah)*. Bandung: FPMIPA UPI.
- Sumarmo, U. (2014). *Kumpulan Makalah: Berpikir dan Disposisi Matematik serta Pembelajarannya*. FMIPA UPI Bandung: tidak diterbitkan.
- Suryana, A. (2012). Kemampuan Berpikir Matematis Tingkat Lanjut (Advanced Mathematical Thinking) Dalam Mata Kuliah Statistika Matematika 1. Disampaikan pada seminar nasional matematika dan pendidikan matematika FMIPA UNY pada tanggal 10 November 2012.
- Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.