

ANALISIS DOUBLE INTEGRAL PADA MOMEN INERSIA DALAM PESAWAT ATWOOD MENGGUNAKAN KATROL DENGAN PENAMBAHAN MASSA BEBAN

Imas Ratna Ermawaty^{1)*}, Y. Soenarto²⁾, dan Felicianda¹⁾

¹⁾Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan,
Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA

²⁾Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan,
Universitas Muhammadiyah Prof. DR. HAMKA

***ABSTRACT** - In the experiment of the atwood plane there is a perpendicular straight motion (GLB) and a perpendicularly altered gerial (GLBB), which is a straight-line motion with a fixed velocity of zero acceleration, so the distance traveled is determined only by a fixed velocity within a certain time . While the GLBB is a straight motion in the horizontal direction with the density that changes at any time due to a fixed acceleration. Not only straight-line motion and straight motion change regularly, but the working principle of the pulley is also applied. The moment of inertia of a pulley is a measure of the inertia of a pulley to rotate or change its rotational state when there is a resultant moment of force acting on it. The moment of inertia of this pulley can be determined first by using a conceptual and mathematical approach through translation by using differential and integral techniques, and the second is by empirical approach through experiment, the moment of inertia of a pulley will be determined by using empirical approach through experiment and mathematical physics calculation. The double integral used in this study is a double integral, where the application in physics is a moment of inertia. Atwood aircraft is an experimental tool that is often used to observe the laws of mechanics on the motion of accelerated regularly*

Kata Kunci: Atwood plane, GLB, GLBB, Moment of Inertia, Double integral

Pendahuluan

Fisika merupakan ilmu alam atau studi tentang materi, gejala benda alam yang tidak hidup dan pergerakannya melalui ruang dan waktu. misalnya energi dan daya. Bila dilihat secara lebih luas lagi bahwa fisika adalah ilmu yang menganalisis alam, dilakukan untuk

* Email: imas_re@uhamka.ac.id

memahami bagaimana alam semesta berperilaku. Ilmu fisika juga terjadi pada diri kita, dimana kita dapat berdiri tegak tanpa melayang di bumi ini. Tak hanya pada kita, fisika juga terjadi pada setiap benda termasuk benda tegar, serta benda – benda yang memiliki dinamika gerak translasi.

Dalam eksperimen pesawat atwood ini terdapat gerak lurus beraturan (GLB) dan gerak lurus berubah beraturan (GLBB), yang mana GLB adalah gerak lurus pada arah mendatar dengan kecepatan tetap dengan percepatan nol, sehingga jarak yang ditempuh hanya ditentukan oleh kecepatan yang tetap dalam waktu tertentu. Sedangkan GLBB adalah gerak lurus pada arah mendatar dengan kecepatan yang berubah setiap saat karena adanya percepatan yang tetap. Tak hanya gerak lurus beraturan maupun gerak lurus berubah beraturan, tapi prinsip kerja katrol juga diterapkan. Katrol merupakan sebuah roda yang sekelilingnya diberi tali dan dipakai untuk mempermudah pekerjaan manusia. Jika kamu mengangkat barang dengan menggunakan katrol, maka kamu akan merasa lebih ringan jika jumlah katrol yang kamu gunakan semakin banyak. Sifat kelembaman atau inersial itu dinyatakan oleh massa kelembaman atau massa inersial yang biasa disebut secara singkat sebagai massa. Dalam gerak rotasi murni, peran massa kelembaman benda tegar digantikan oleh momen kelembaman benda tegar atau momen inersia benda tegar. Momen inersia benda tegar adalah sifat benda tegar mempertahankan keadaan geraknya atau berarti sama dengan kemalasan benda tegar untuk mengubah keadaan geraknya. Momen inersia sebuah benda tegar bergantung kepada bentuk geometris, distribusi massa dan letak sumbu rotasinya. Dalam kegiatan belajar ini anda dapat mempelajari momen inersia dari sebuah katrol. Momen inersia sebuah katrol merupakan ukuran kelembaman sebuah katrol untuk berotasi atau berubah keadaan gerak rotasinya bila ada resultan momen gaya yang bekerja padanya.

Fisika matematika adalah perhitungan matematika yang dibuat untuk mengembangkan struktur matematis bagi teori-teori fisika. Fisika sangatlah berhubungan erat dengan matematika, hal ini dikarenakan teori fisika sering sekali dinyatakan dalam notasi matematis dan juga karena matematika dapat menyediakan kerangka logika dimana hukum- hukum fisika dapat diformulasikan secara tepat. Fisika matematika terdapat pelajaran mengenai multiple integral. Multiple integral yang digunakan dalam penelitian ini adalah double integral, dimana aplikasi dalam fisika berupa momen inersia. Double integral atau integral lipat dua merupakan hasil integrasi yang dilakukan terhadap komponen y kemudian kembali diintegrasikan pada komponen x . Untuk menyelesaikan persoalan ini, kita dapat menyelesaikan pengintegrasian bagian dalam terlebih dahulu, kemudian bagian luar.

Gerak Lurus Beraturan

Gerak lurus beraturan didefinisikan sebagai gerak suatu benda dengan kecepatan tetap. Kecepatan tetap artinya baik besar maupun arahnya tetap. Kecepatan tetap yaitu benda menempuh jarak yang sama untuk selang waktu yang sama. Misalnya sebuah mobil bergerak dengan kecepatan tetap 75 km/jam atau 1,25 km/menit, berarti setiap menit mobil itu menempuh jarak 1,25 km. Karena kecepatan benda tetap, maka kata kecepatan pada gerak lurus beraturan dapat diganti dengan kata kelajuan. Dengan demikian, dapat juga kita

definisikan, gerak lurus beraturan sebagai gerak suatu benda pada lintasan lurus dengan kelajuan tetap.

Hukum Newton

Hukum I Newton: *Setiap benda akan tetap diam atau bergerak lurus beraturan jika tidak ada resultan gaya yang bekerja pada benda itu.* Jika kita simpulkan, maka menurut hukum I Newton ini setiap benda bersifat lembam yang berarti bersifat mempertahankan keadaan geraknya. Kemudian yang dimaksud dengan resultan gaya pada benda adalah jumlah vektor dari semua gaya yang bekerja pada benda itu.

Hukum II Newton: *Percepatan yang dialami sebuah benda besarnya sebanding dengan besar resultan gaya yang bekerja pada benda itu, searah resultan gaya itu dan berbanding terbalik dengan massa kelembaman benda itu.* Hukum II Newton ini biasa dinyatakan secara matematik dengan persamaan:

$$\sum F = m \cdot a$$

Pada persamaan di atas, m disebut massa kelembaman benda. Massa kelembaman benda diperoleh dengan cara membandingkan resultan gaya yang bekerja pada benda itu dengan percepatan yang dialaminya akibat resultan gaya tersebut.

Hukum III Newton: *Untuk setiap gaya (aksi) terdapat sebuah pasangan gaya (reaksi) yang besarnya sama dan arahnya berlawanan.* Hukum III Newton ini biasa dikenal sebagai hukum aksi-reaksi dan biasa dinyatakan secara singkat sebagai $F_{aksi} = -F_{reaksi}$.

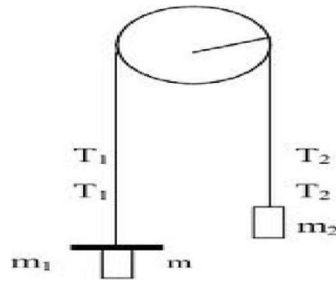
Sistem Katrol

Katrol adalah suatu roda dengan bagian berongga di sepanjang sisinya untuk tempat tali atau kabel. Katrol biasanya digunakan dalam suatu rangkaian yang dirancang untuk mengurangi jumlah gaya yang dibutuhkan untuk mengangkat suatu beban. Walaupun demikian, jumlah usaha yang dilakukan untuk membuat beban tersebut mencapai tinggi yang sama adalah sama dengan yang diperlukan tanpa menggunakan katrol. Besarnya gaya memang dikurangi, tapi gaya tersebut harus bekerja atas jarak yang lebih jauh. Usaha yang diperlukan untuk mengangkat suatu beban secara kasar sama dengan berat beban dibagi jumlah roda. Semakin banyak roda yang ada, sistem semakin tidak efisien karena akan timbul lebih banyak gesekan antara tali dan roda.

Katrol adalah salah satu dari enam jenis pesawat sederhana. Katrol yang digunakan dalam pesawat ini adalah katrol tetap, dimana katrol tetap adalah katrol yang dipasang tetap pada suatu titik. Biasanya digunakan untuk mengubah arah gaya yang kita keluarkan.

Untuk sebuah katrol dengan beban-beban seperti pada Gambar 1, apabila dianggap $M_1 = M_2 = M$ maka berlaku persamaan berikut.

$$a = \frac{mg}{2M + m + \frac{1}{r^2}}$$



Gambar 1 Katrol pada pesawat atwood

Momen Inersia pada Katrol

Pada gambar katrol di atas dilukiskan sebuah sistem yang terdiri dari dua buah silinder yang massanya dibuat sama M_1 dan M_2 dihubungkan dengan tali melalui sebuah katrol. Pada sistem ini gesekan katrol dan massa tali diabaikan, tali dianggap tidak mulur dan tidak pernah slip terhadap katrol. Sistem yang demikian ini kemudian disebut sebagai pesawat Atwood. Pada M_1 diberikan massa tambahan m agar sistem bergerak lurus berubah beraturan. Karena $(M_1 + m) > M_2$ maka $(M_1 + m)$ dan M_2 kedua-duanya akan bergerak dipercepat beraturan sesuai dengan hukum II Newton. $(M_1 + m)$ bergerak turun, M_2 bergerak naik dan katrol berotasi. Karena tali dianggap tidak mulur, maka percepatan $(M_1 + m)$ akan sama besarnya dengan percepatan M_2 . Dengan menerapkan hukum II Newton, dapat diperoleh besar resultan gaya pada masing-masing silinder sesuai dengan persamaan berikut ini. Pada $(M_1 + m)$ bekerja resultan gaya sebesar :

$$W_1 - T_1 = (M_1 + m)a \dots\dots\dots (2)$$

sedangkan pada benda M_2 bekerja resultan gaya sebesar :

$$W_2 - T_2 = M_2 a \dots\dots\dots (3)$$

Jika kedua persamaan (2) dan (3) di atas dijumlahkan maka dapat diperoleh :

$$(W_1 - W_2) - (T_1 - T_2) = (M_1 + M_2 + m)a \dots\dots\dots(4)$$

Pada katrol, selisih tegangan tali $(T_1 - T_2)$ akan menyebabkan momen gaya terhadap sumbu katrol sehingga katrol berotasi dengan percepatan sudut α yang besarnya memenuhi persamaan :

$$(T_1 - T_2) = I \alpha / R \dots\dots\dots(5)$$

Dengan I adalah momen inersia katrol

Bila kita hubungkan gerak translasi dengan $(M_1 + m)$ dan M_2 dengan gerak rotasi katrol, maka terdapat hubungan $a = \alpha \cdot R$. artinya percepatan tali atau percepatan kedua silinder sama dengan percepatan tangensial pinggirak katrol. Dengan demikian, maka persamaan di atas dapat diubah menjadi :

$$\frac{Ia}{R^2} = (W_1 - W_2) - (M_1 + M_2 + m)a \cdot R \dots\dots\dots(6)$$

Persamaan (6) di atas dapat diubah menjadi:

$$a = \frac{(W_1 - W_2) \cdot R}{(M_1 + M_2 + m)R + \frac{I}{R}} \dots\dots\dots(7)$$

Dengan demikian, momen inersia dalam pesawat atwood adalah

$$I = \frac{((M_1+m-M_2)g-(M_1+m-M_2)a)R^2}{a} \dots\dots\dots(8)$$

Pesawat Atwood

Pesawat Atwood merupakan alat eksperimen yang sering digunakan untuk mengamati hukum mekanika pada gerak yang dipercepat secara beraturan. Sederhananya pesawat atwood tersusun atas 2 benda yang terhubung dengan seutas kawat/tali. Bila kedua benda massanya sama, keduanya akan diam. Tapi bila salah satu lebih besar (misal $m_1 > m_2$). Maka kedua benda akan bergerak ke arah m_1 dengan dipercepat. Gaya penariknya sesungguhnya adalah berat benda 1. Namun karena benda 2 juga ditarik ke bawah (oleh gravitasi), maka gaya penarik resultannya adalah berat benda 1 dikurangi berat benda 2. Berat benda 1 adalah $m_1 \cdot g$ dan berat benda 2 adalah $m_2 \cdot g$. Gaya resultannya adalah $(m_2 - m_1)g$ dan gaya ini menggerakkan kedua benda. Sehingga, percepatan kedua benda adalah resultan gaya tersebut dibagi jumlah massa kedua benda.

Fisika dalam *Double Integral*

Momen inersia I dari titik bermassa m terhadap sebuah sumbu dihitung dengan mengalikan massa m dengan jarak l titik massa tersebut ke sumbu. Momen inersia terhadap sumbu x massa ditulis I_x , dan terhadap sumbu y, I_y .

$$I_x = \iint y^2 dM$$

$$I_y = \iint x^2 dM$$

Jarak titik massa terhadap terhadap sumbu z adalah $\sqrt{(x^2 + y^2)}$, maka

$$I_z = \iint (x^2 + y^2) dM = I_x + I_y$$

Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada laboratorium Fisika FKIP UHAMKA, dilakukan berupa percobaan / eksperimen terhadap 2 beban utama yang dihubungkan dengan seutas tali dan digantung melalui katrol. Beban yang satu ditempelkan pada klep yang kemudian dilepaskan. Jika beban kedua lebih besar maka, beban kedua akan jatuh dan melewati titik Sca dan berhenti di titik Sab. Waktu dihitung dari beban satu lepas dari klep hingga berenti di Sab. Begitu juga saat beban dua diberi beban tambahan.

Hasil dan Pembahasan

Dari hasil penelitian ini didapatkan nilai untuk kecepatan, percepatan, serta momen inersia pada tiap – tiap massa.

Tabel 1. Hasil Momen Inersia Menggunakan Massa dalam Perhitungan Biasa

No	Massa	Vo (m/s)	Vt (m/s)	$a\left(\frac{m}{s^2}\right)$	$I(kg \cdot m^2)$
1	0,047 kg	(0,48 ± 0,03)	(0,22 ± 0,006)	(0,34 ± 0,09)	$(3,45 \times 10^3 \pm 1,35 \times 10^3)$
2	0,0535 kg	(0,35 ± 0,019)	(0,28 ± 0,016)	(0,12 ± 0,05)	$(0,0107 \pm 5,15 \times 10^{-3})$

Dari Tabel di atas, didapatkan bahwa momen inersia pada massa 0,047 kg sebesar $(3,45 \times 10^3 \pm 1,35 \times 10^3) \text{ kgm}^2$. Sedangkan momen inersia pada massa 0,0535 kg sebesar $(0,0107 \pm 5,15 \times 10^{-3}) \text{ kgm}^2$.

Tabel 2. Hasil Momen Inersia Tanpa Menggunakan Massa dalam Double Integral

Momen Inersia	$9,139 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$
---------------	--------------------------------------

Dari Tabel diatas, didapatkan bahwa momen inersia yang didapat dari perhitungan double intergral / integral lipat dua sebesar $9,139 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$.

Pada saat menghitung dengan perhitungan biasa, didapatkan bahwa kecepatan Vo untuk massa tunggal (0,047 kg) lebih cepat dibandingkan kecepatan Vo untuk massa yang ditambahi beban tambahan (0,0535 kg). Hal ini dikarenakan waktu yang ditempuhnya semakin cepat. Sedangkan untuk Vt, kecepatan massa tunggal agak sedikit lama dibandingkan massa yang ditambahi beban karena waktu yg ditempuh lebih lama akibat terjadi bernturan. Kejadian ini menyebabkan percepatannya mengalami perlambatan. Untuk momen inersia, beban yang ditambahi beban tambahan memiliki inersia yg lebih besar dibandingkan beban tunggal. Sedangkan pada saat menghitung dengan perhitungan integral lipat dua, didapatkan hanya satu momen inersia padahal beban yang diamati memiliki dua massa. Hal ini diakibatkan karena massa yang digunakan dalam menghitung momen inersia berasal dari massa jenis dikalikan dengan volumenya. Oleh sebab itu, pada perhitungan kali ini, massa tidak digunakan dan digantikan dengan massa jenis/densitas dengan volumenya. Hal ini mengakibatkan nilai momen inersia saat tidak menggunakan massa lebih kecil daripada saat menggunakan massa. Dapat disimpulkan bahwa, momen inersia dapat bernilai besar maupun kecil, tergantung dengan penggunaan percepatan dalam perhitungannya. Apabila percepatan yang digunakan besar, maka momen inersia akan bernilai kecil, begitupun sebaliknya. Tak hanya itu, massa juga mempengaruhi nilai untuk memperoleh momen inersia, apabila dalam perhitungan massa diganti dengan massa jenis dan volume maka momen inersia yang didapat akan bernilai kecil.

Kesimpulan

Pesawat Atwood merupakan alat yang dapat dijadikan sebagai aplikasi atau sebagai alat yang dapat membantu dalam membuktikan Hukum-hukum Newton ataupun gejala-gejala lainnya. Hukum newton satu hingga tiga berlaku dalam Pesawat Atwood. Momen inersia yang dihasilkan dalam percobaan Pesawat Atwood memiliki perbedaan terhadap beban yang diberikan. Apabila beban yang diberikan besar maka momen inersia yang terjadi besar, begitu juga sebaliknya.

Daftar Pustaka

- Alonso, M. dan Finn, E.D. 1980. *Fundamental University Physics*. New York; Addison Wesley Longman.
- Boas, L. Mary. 1983. *Mathematical Methods in the Physical Sciences, Second Edition*; Unite States of America.
- Cooper W.D., 1985, *Instrumentasi Elektronik dan Teknik Pengukuran*, Erlangga; Jakarta.
- Halliday, David; Resnick, Robert; and Walker, Jearl. 2001. *Fundamental of Physics*. New York: John Wiley & Sons
- Jurnal Fisika Indonesia
- Longman, Sulistiyo, Eko Dkk. *Software Simulasi Praktikum CRO.FMIPA UGM*. Yogyakarta Pradnya, Paramita . 1998, *Fundamental Electrical Instrumentation*, Singapore : Jurnal Fisika
- Indonesia Purcell, Vanberg, 2010. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1, Edisi Kelima*. Erlangga; Jakarta.
- Sapiie S., Nishino O., 1979, *Pengukuran dan Alat-alat Ukur Listrik*. Jakarta.
- Sears, F.W. Zemanski. 1986. *University Physics*. New York: Addison Wesley
- Staf pengajar IPB. 2010. *Gelombang dan Getaran*. Dep. Fisika IPB.
- Sudjana. 2005. *Metode Statistik*. Tarsito; Bandung
- Sunarto, Ridwan. 2009. *Pengantar Statistika*, Alfabeta; Bandung
- Tippler, Paul A. 1991. *Fisika untuk Sains dan Teknik*. Erlangga; Jakarta.
- Young dan Freedman. 1999. *Fisika Universitas, Edisi Kesepuluh Jilid 1*. Erlangga; Jakarta.

